

Chapitre 4

Oscillateur harmonique et mouvement circulaire



4.1 Oscillateur harmonique

4.1.1 Force élastique

4.1.2 Loi du mouvement oscillatoire harmonique

4.1.3 Equation du mouvement oscillatoire harmonique

4.1.4 Conditions initiales

4.2 Oscillateur harmonique amorti

4.2.1 Loi du mouvement oscillatoire harmonique amorti

4.2.2 Equation du mouvement harmonique oscillatoire amorti

4.2.3 Amortissement faible

4.2.4 Amortissement fort

4.2.5 Amortissement critique

4.2.6 Conditions initiales

4.3 Mouvement circulaire et vitesse angulaire

4.3.1 Abscisse curviligne

4.3.2 Vitesse angulaire scalaire

4.3.3 Accélération centripète

4.3.4 Vecteur vitesse angulaire

4.3.5 Accélération angulaire scalaire

4.1 Oscillateur harmonique

4.1.1 Force élastique

4.1.2 Loi du mouvement oscillatoire harmonique

4.1.3 Equation du mouvement oscillatoire harmonique

4.1.4 Conditions initiales

- **Modèle vibratoire universel** : physique, chimie, ingénierie

1 Mécanique quantique

- vibrations moléculaires - phonons
- vibrations électromagnétiques - photons
- solide
- quarks

2 Ingénierie

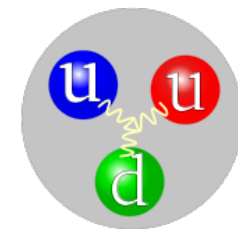
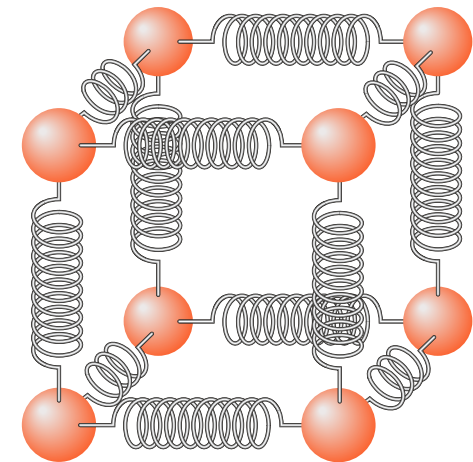
- réduction des vibrations

3 Cosmologie

- formation des galaxies - fluctuation de la matière

4 Finance

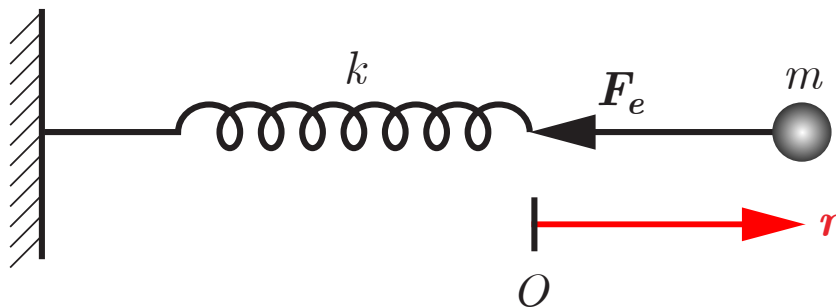
- bourse - fluctuation des titres



- **Régimes de déformations** : d'un objet sous contrainte mécanique
 - ① **Elastique** : déformation non permanente (réversible)
 - ② **Plastique** : déformation permanente (irréversible)
- **Modèle élastique** : en régime de déformation élastique, la force élastique est proportionnelle à la déformation et elle s'oppose au mouvement.
- **Loi de Hooke** :

$$F_e = -k d \quad \text{où} \quad k > 0 \quad (4.1)$$

où k est la constante élastique

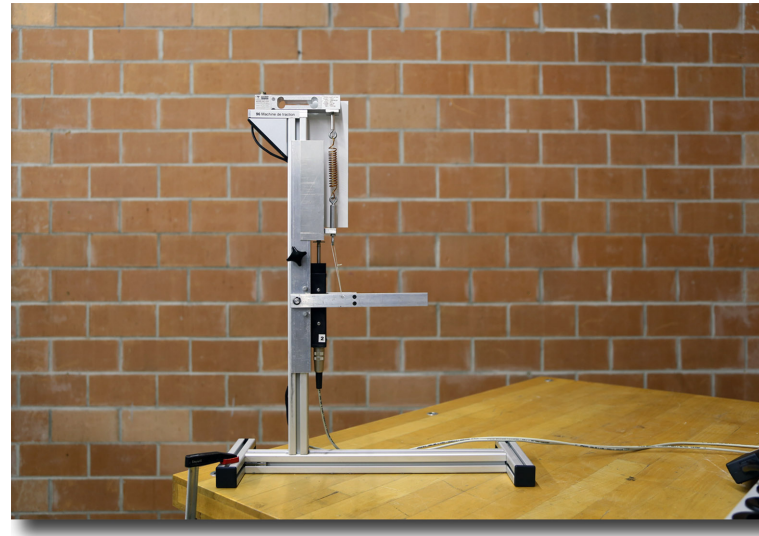
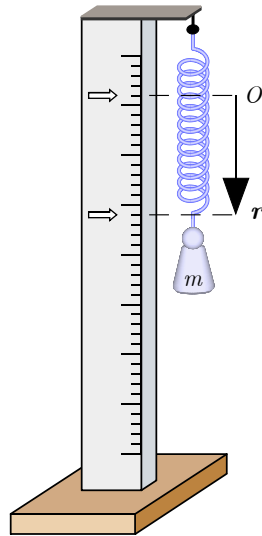


Robert Hooke

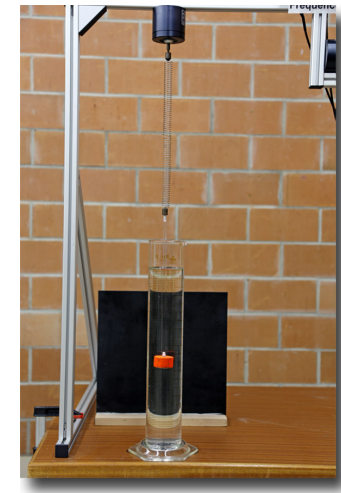
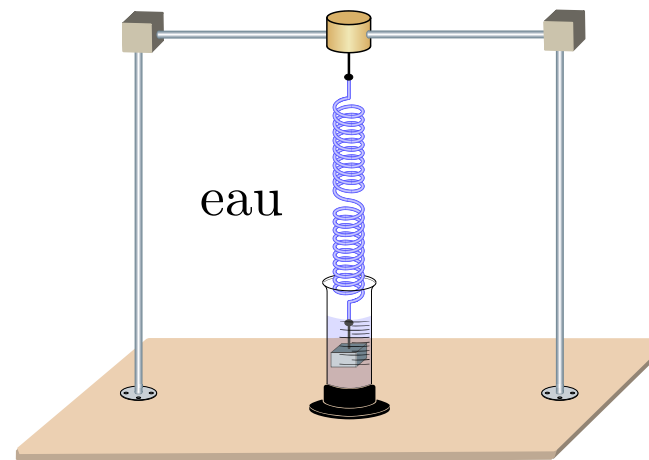
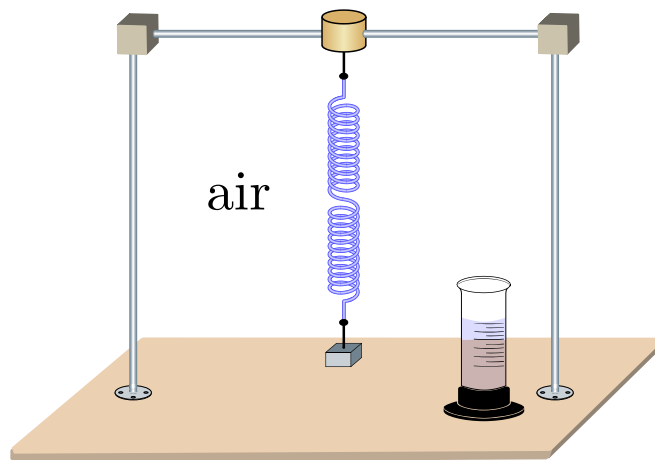
1635 – 1703



- En prenant comme origine O la position d'équilibre de la masse m , le vecteur déformation d du ressort coïncide avec le vecteur position r .



- On fait la mesure à l'aide d'un capteur de force et de déplacement en tirant sur le ressort. La force est représentée selon l'axe vertical et l'élongation du ressort est représentée selon l'axe horizontal.
- ① En régime élastique, l'élongation est proportionnelle à la force appliquée (loi de Hooke). Lorsqu'on relâche la contrainte, il n'y a pas de déformation permanente (réversible).
- ② En régime plastique, la force n'est plus une fonction linéaire de l'élongation. Lorsqu'on relâche la contrainte, il reste une déformation permanente (irréversible).



- 1 Dans l'air, l'amplitude d'oscillation du ressort est quasiment constante durant un intervalle de temps assez court. Durant cet intervalle de temps, on peut considérer que la force de frottement de l'air est négligeable. Le modèle est celui d'un oscillateur harmonique sans frottement.
- 2 Dans l'eau, l'amplitude d'oscillation du ressort décroît rapidement. On doit prendre en compte la force de frottement de l'eau qui rend compte de l'amortissement du mouvement d'oscillation. Le modèle est celui d'un oscillateur harmonique avec frottement.

- **Modèle** : les causes dynamiques du mouvement oscillatoire harmonique sont les forces extérieures.
- **Déformation et poids** : l'origine le long de l'axe vertical coïncide avec la position d'équilibre de la masse suspendue qui est déterminée par le poids.

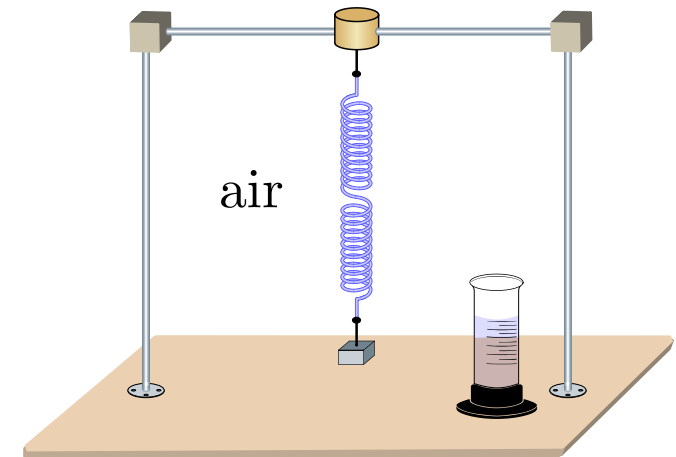
$$d = r \quad (4.2)$$

- ① **Force élastique** : loi de Hooke (4.2)

$$F_e = -k r \quad (4.1)$$

- ② **Force de frottement** : négligeable

$$F_f \ll F_e$$



- **Loi du mouvement oscillatoire sans frottement** : 2^e loi de Newton

$$F^{\text{ext}} = F_e = m a \quad (4.3)$$

- **Loi du mouvement oscillatoire** : (4.1) dans (4.3)

$$m a = -k r \quad (4.4)$$

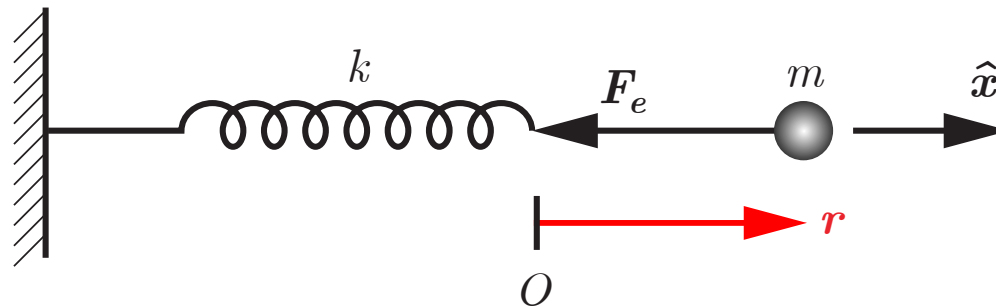
- Loi du mouvement oscillatoire harmonique sans frottement :

$$m \mathbf{a} = -k \mathbf{r} \quad (4.4)$$

Dans le cas général, le mouvement oscillatoire harmonique est un mouvement plan. Si la vitesse initiale est nulle, alors le mouvement oscillatoire harmonique est rectiligne.

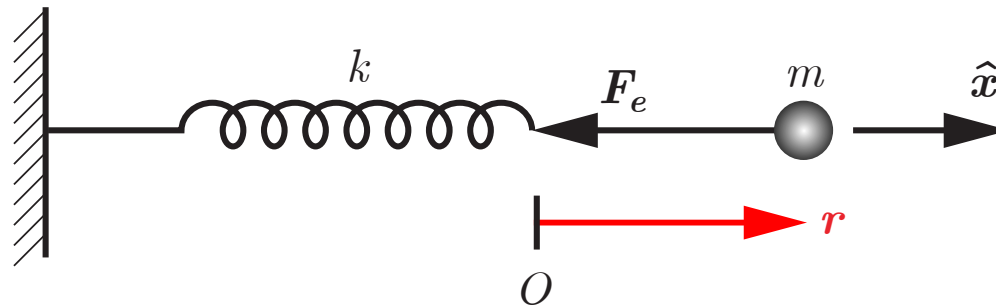
- Mouvement rectiligne : axe Ox

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{a} = \ddot{x} \hat{\mathbf{x}}$$



- Equation du mouvement oscillatoire harmonique : axe Ox

$$\text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad m \ddot{x} = -k x \quad (4.5)$$



- **Equation du mouvement oscillatoire harmonique** : axe Ox

selon $\hat{x}$: $m \ddot{x} = -k x$ (4.5)

- **Pulsation** : définition (vitesse angulaire)

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.6)$$

- **Equation du mouvement oscillatoire harmonique** : (4.6) dans (4.5)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} = -\omega^2 x \quad (4.7)$$

- **Equation du mouvement** : 2^e ordre

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} = -\omega^2 x \quad (4.7)$$

- **Equation du mouvement** : 1^{er} ordre (4.8)

$$\dot{x} = \sqrt{-\omega^2} x \quad \text{ainsi} \quad \ddot{x} = \sqrt{-\omega^2} \dot{x} = -\omega^2 x$$

- **Solutions mathématiques unitaires** : $x(t) \in \mathbb{C}$

$$x(t) = e^{\sqrt{-\omega^2}t} = e^{\pm i\omega t} \quad (4.9) \text{ et } (4.10)$$

$$|e^{\pm i\omega t}|^2 = e^{\pm i\omega t} e^{\mp i\omega t} = e^{\pm i(\omega - \omega)t} = e^0 = 1$$

- **Formule d'Euler** : solutions graphiques

$$x(t) = e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t) \quad (4.11)$$

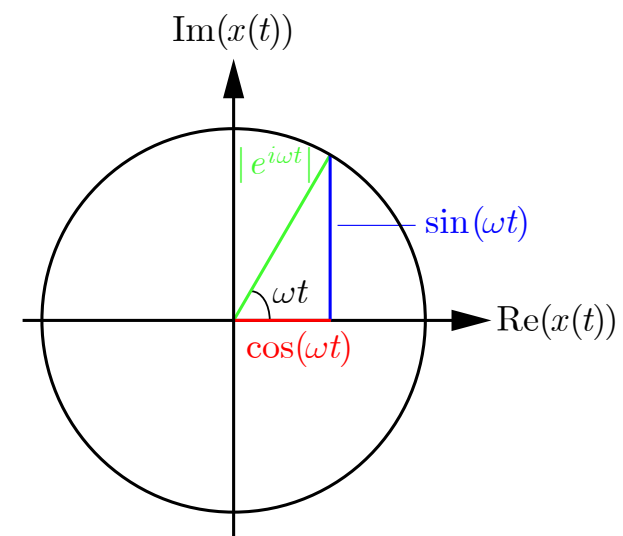
- **Cercle trigonométrique** : formule de Pythagore

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1 \quad (4.13)$$

Leonhard Euler
1707 – 1783



$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (4.12)$$



- Equation du mouvement oscillatoire :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} = -\omega^2 x \quad (4.7)$$

- Solutions mathématiques : $x(t) \in \mathbb{C}$

$$① \quad x(t) = e^{i\omega t}$$

$$② \quad x(t) = e^{-i\omega t} \quad (4.9)$$

- Solutions physiques : $x(t) \in \mathbb{R}$

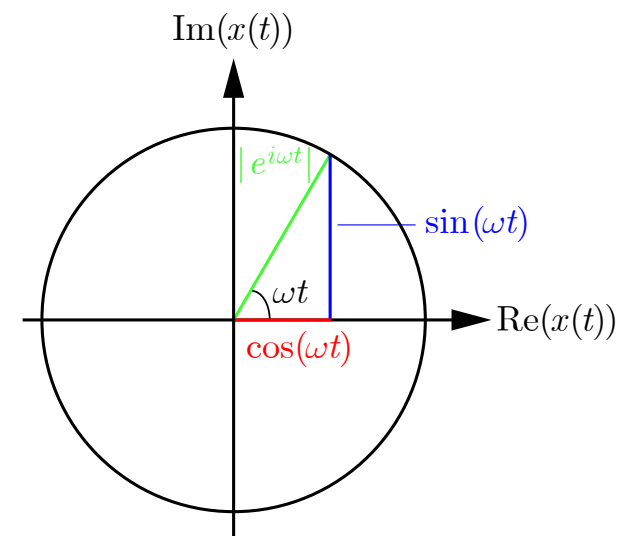
$$① \quad x(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$② \quad x(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \quad (4.14)$$

- Les solutions physiques réelles sont des combinaisons linéaires des solutions mathématiques complexes.

Leonhard Euler

1707 – 1783



- **Solution physique générale** : combinaison linéaire des solutions particulières

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \text{où} \quad A, B \in \mathbb{R} \quad (4.15)$$

- **Changement de variables** : $(A, B) \rightarrow (C, \varphi) : C \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi \in [0, 2\pi)$

$$A = C \cos \varphi$$

$$B = -C \sin \varphi \quad (4.16)$$

- **Solution physique générale** :

$$x(t) = C (\cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t)) \quad (4.17)$$

- **Identité trigonométrique** :

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \quad (4.18)$$

- **Solution physique générale** :

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.19)$$

- **Solution physique générale :**

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.19)$$

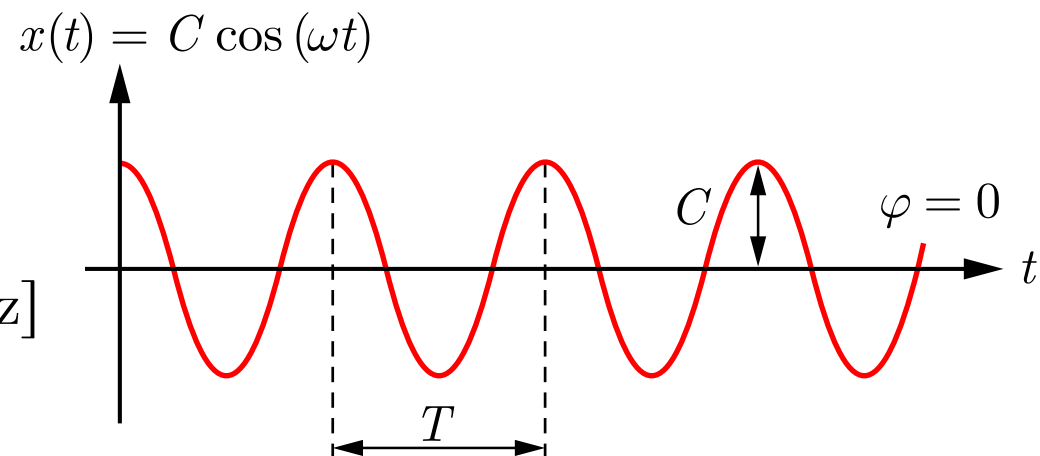
- **Période :**

$$\omega T = 2\pi \quad \text{ainsi} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (4.20)$$

- **Fréquence :**

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ainsi} \quad \omega = 2\pi f \quad (4.21)$$

- ① Amplitude C [m]
- ② Pulsation ω [s⁻¹]
- ③ Angle de déphasage φ
- ④ Fréquence f [s⁻¹] = [Hz]
- ⑤ Période T [s]



- Equation horaire de l'oscillateur harmonique :

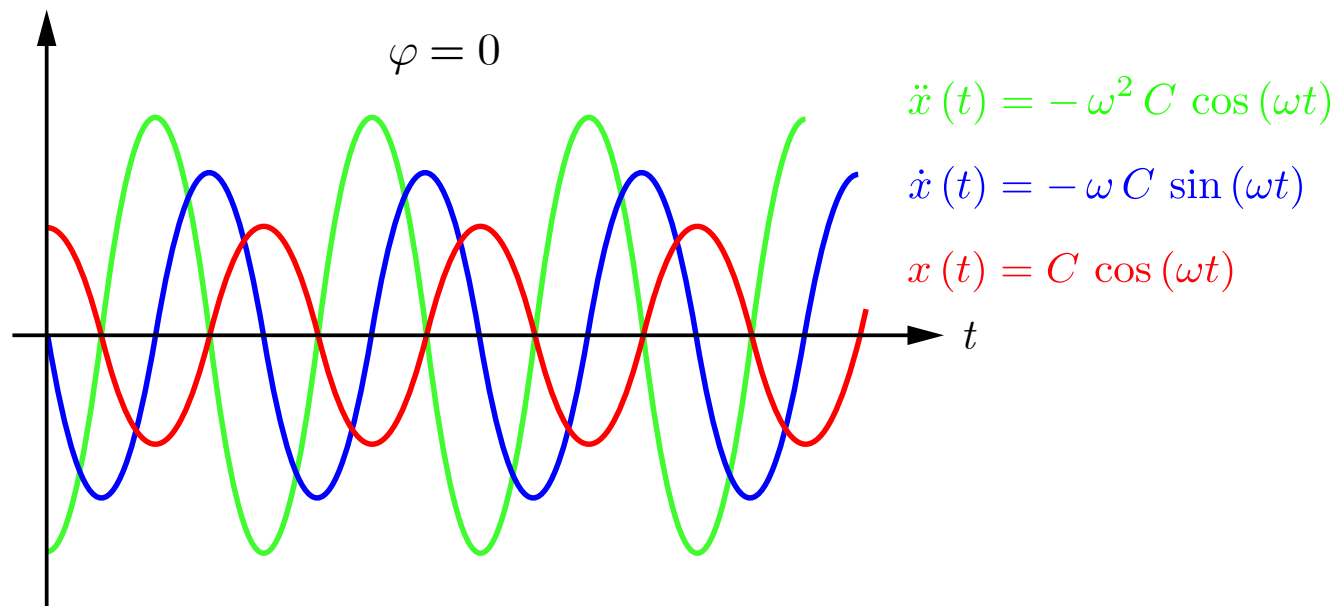
$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.19)$$

- Equation de la vitesse de l'oscillateur harmonique :

$$\dot{x}(t) = -\omega C \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.22)$$

- Equation du mouvement de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 C \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t) \quad (4.23)$$



- **Solution physique générale :**

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.19)$$

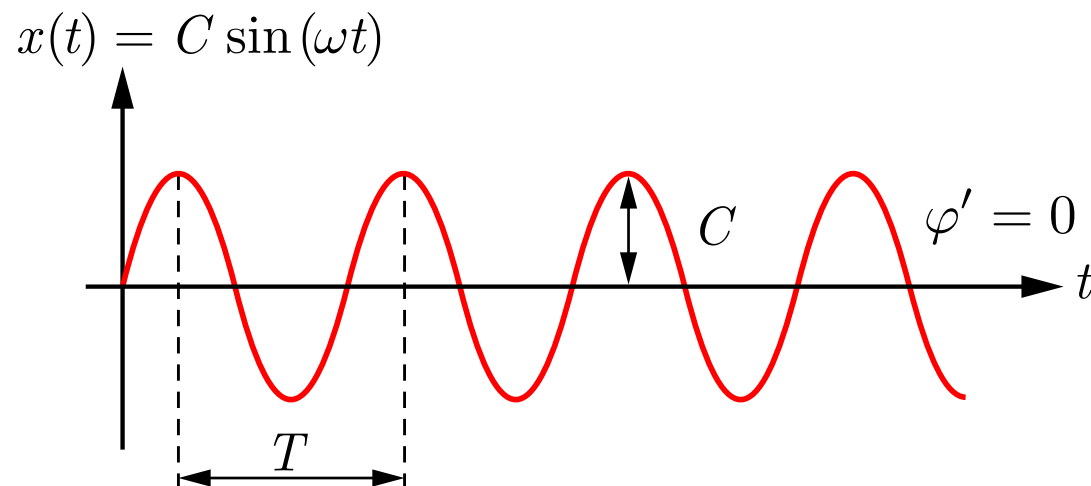
- **Angle de déphasage :** déphasé d'un quart de période

$$\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2} \quad (4.24)$$

- **Solution physique générale :** déphasée d'un quart de période

$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi') \quad (4.25)$$

- Les constantes (C, φ) ou (C, φ') sont déterminées par les conditions initiales imposées à la position et à la vitesse.



- Equation horaire de l'oscillateur harmonique :

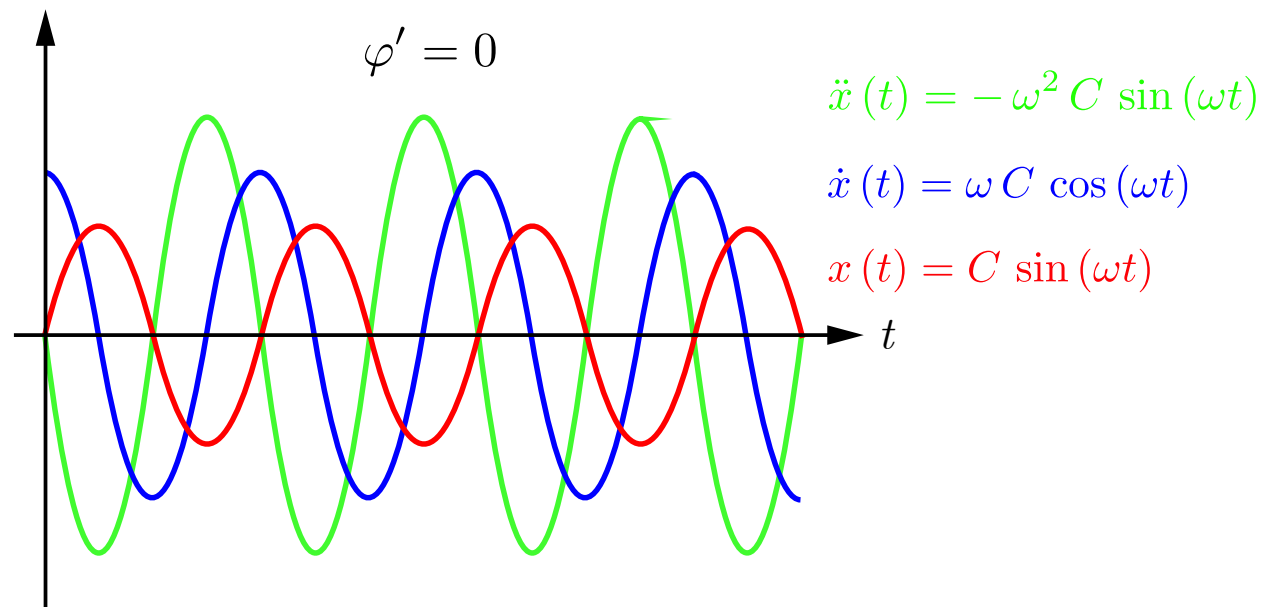
$$x(t) = C \sin(\omega t + \varphi') \quad (4.25)$$

- Equation de la vitesse de l'oscillateur harmonique :

$$\dot{x}(t) = \omega C \cos(\omega t + \varphi') \quad (4.26)$$

- Equation du mouvement de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 C \sin(\omega t + \varphi') = -\omega^2 x(t) \quad (4.27)$$



- **Equation horaire générale :**

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4.15)$$

- **Equation générale de la vitesse :** dérivée temporelle de (4.15)

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t) \quad (4.28)$$

- **Conditions initiales :** position et vitesse

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad (4.29)$$

- **Condition initiale sur la position :** (4.29) dans (4.15) évaluée en $t = 0$

$$x(0) = A = x_0 \quad (4.30)$$

- **Condition initiale sur la vitesse :** (4.29) dans (4.28) évaluée en $t = 0$

$$\dot{x}(0) = \omega B = v_0 \quad \text{ainsi} \quad B = \frac{v_0}{\omega} \quad (4.31)$$

- **Equation horaire particulière :** déterminée par les conditions initiales

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (4.32)$$

- **Equation horaires générales :** (4.19) ou (4.25)

$$x(t) = C \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad x(t) = C \sin(\omega t + \varphi')$$

- **Equations générales de la vitesse :** (4.22) ou (4.28)

$$\dot{x}(t) = -\omega C \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{ou} \quad \dot{x}(t) = \omega C \cos(\omega t + \varphi')$$

- **Conditions initiales :** position et vitesse

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.33)$$

- **Condition initiale vitesse :** (4.33) dans (4.22) ou (4.28)

$$\sin \varphi = \cos \varphi' = 0 \quad \text{ainsi} \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi' = \frac{\pi}{2} \quad (4.34)$$

- **Condition initiale position :** (4.33) et (4.34) dans (4.19) ou (4.25)

$$C \cos 0 = C \sin \frac{\pi}{2} = x_0 \quad \text{ainsi} \quad C = x_0 \quad (4.35)$$

- **Equation horaire particulière :** (4.34) et (4.35) dans (4.19) ou (4.25)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.36)$$

4.2 Oscillateur harmonique amorti

- 4.2.1 Loi du mouvement oscillatoire harmonique amorti
- 4.2.2 Equation du mouvement harmonique oscillatoire amorti
- 4.2.3 Amortissement faible
- 4.2.4 Amortissement fort
- 4.2.5 Amortissement critique
- 4.2.6 Conditions initiales

- **Modèle** : les causes dynamiques du mouvement oscillatoire harmonique sont les forces extérieures.
- **Déformation et poids** : l'origine le long de l'axe vertical coïncide avec la position d'équilibre de la masse suspendue qui est déterminée par le poids.

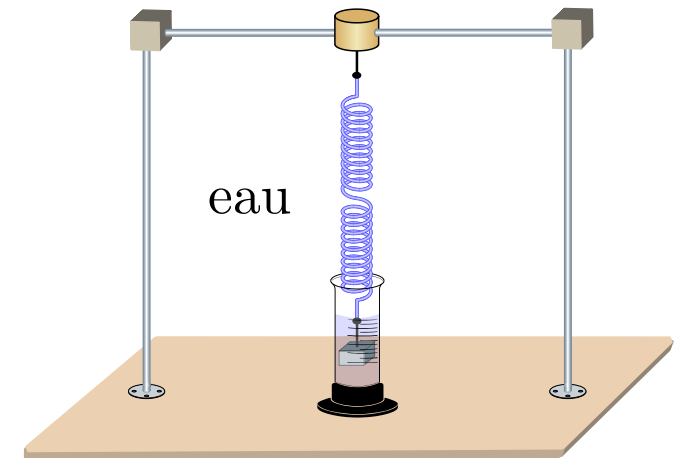
$$d = r \quad (4.2)$$

- ① **Force élastique** : loi de Hooke (4.2)

$$F_e = -k r \quad (4.1)$$

- ② **Force de frottement** : loi de Stokes

$$F_f = -b v \quad (3.3)$$



- **Loi du mouvement oscillatoire amorti** : 2^e loi de Newton

$$\sum F^{\text{ext}} = F_e + F_f = m a \quad (4.37)$$

- **Loi du mouvement oscillatoire amorti** : (4.1) et (3.3) dans (4.37)

$$m a = -b v - k r \quad (4.38)$$

- Loi du mouvement oscillatoire amorti :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_f = m \mathbf{a} \quad (4.37)$$

- Régimes :

- 1 Amortissement faible : $\|\mathbf{F}_f\| \lesssim \|\mathbf{F}_e\|$

- 2 Amortissement critique : $\|\mathbf{F}_f\| \sim \|\mathbf{F}_e\|$

- 3 Amortissement fort : $\|\mathbf{F}_f\| \gtrsim \|\mathbf{F}_e\|$

- Loi du mouvement oscillatoire amorti :

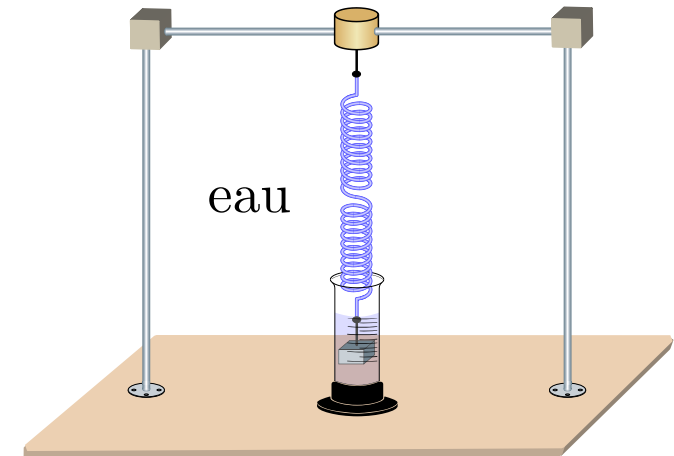
$$m \mathbf{a} = -b \mathbf{v} - k \mathbf{r} \quad (4.38)$$

- Mouvement rectiligne : axe Ox

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \dot{x} \hat{\mathbf{x}} \quad \text{et} \quad \mathbf{a} = \ddot{x} \hat{\mathbf{x}}$$

- Equation du mouvement oscillatoire harmonique amorti : axe Ox

$$\text{selon } \hat{\mathbf{x}} : \quad m \ddot{x} = -b \dot{x} - k x \quad (4.39)$$



- **Equation du mouvement oscillatoire harmonique amorti** : axe Ox

selon $\hat{x}$: $m \ddot{x} = -b \dot{x} - k x$ (4.39)

- **Pulsation** : sans frottement (définition)

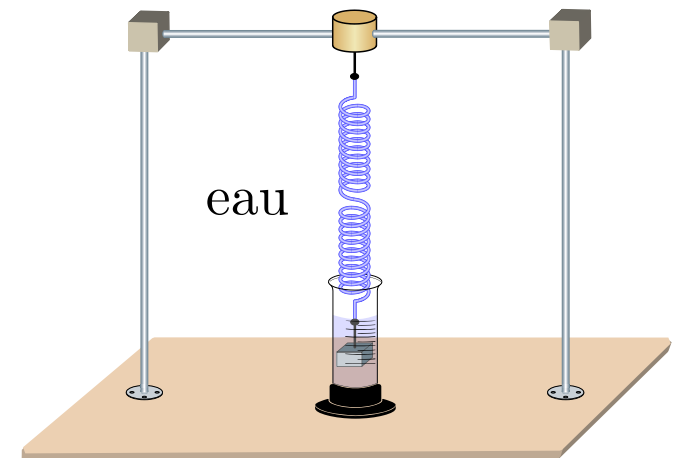
$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} > 0 \quad (4.40)$$

- **Facteur d'amortissement** : (définition)

$$\gamma \equiv \frac{b}{2m} > 0 \quad \text{ainsi} \quad \gamma = \frac{1}{2\tau} \quad (4.41)$$

- **Equation du mouvement oscillatoire harmonique amorti** :

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.42)$$



- **Equation du mouvement oscillatoire harmonique amorti :**

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.42)$$

- **Solution mathématique complexe :** $x(t) \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

$$x(t) \equiv e^{\lambda t} = e^{(\operatorname{Re}(\lambda) + i \operatorname{Im}(\lambda))t} = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} e^{i \operatorname{Im}(\lambda)t} \quad (4.43)$$

❶ **Mouvement amorti :** $e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}$ où $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$

❷ **Mouvement oscillatoire :** $e^{i \operatorname{Im}(\lambda)t}$

- **Equation caractéristique :** (4.43) dans (4.42) pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2) = 0 \quad \text{ainsi} \quad \lambda^2 + 2\gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (4.44)$$

- **Racines :** de l'équation caractéristique (4.44)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} & \text{où} & \quad \lambda_1 \in \mathbb{C} \\ \lambda_2 &= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} & \text{où} & \quad \lambda_2 \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (4.45)$$

- **Equation caractéristique :**

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (4.44)$$

- **Racines :** de l'équation caractéristique (4.44)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} & \text{où} & \quad \lambda_1 \in \mathbb{C} \\ \lambda_2 &= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} & \text{où} & \quad \lambda_2 \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (4.45)$$

- **Solution mathématique générale complexe :** (4.42)

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{où} \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C} \quad (4.46)$$

- **Régimes :**

- 1 **Amortissement faible :** $\gamma < \omega_0$
- 2 **Amortissement critique :** $\gamma = \omega_0$
- 3 **Amortissement fort :** $\gamma > \omega_0$

- **Amortissement faible :**

$$\gamma < \omega_0 \quad \text{ainsi} \quad \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = i \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \equiv i \omega \quad (4.47)$$

- **Racines :** de l'équation caractéristique (4.44)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma + i \omega & \text{où} & \quad \omega \in \mathbb{R}_+ \\ \lambda_2 &= -\gamma - i \omega & \text{où} & \quad \lambda_2 = \lambda_1^* \end{aligned} \quad (4.48)$$

- **Solution mathématique générale complexe :** de l'équation du mouvement (4.42)

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{où} \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C} \quad (4.46)$$

- **Solution mathématique générale complexe :** (4.48) dans (4.46)

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{i \omega t} + A_2 e^{-i \omega t}) \quad (4.49)$$

- **Solution physique générale réelle :** $A_1 \equiv A \in \mathbb{C}$ et $A_2 = A^* \in \mathbb{C}$

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{i \omega t} + A^* e^{-i \omega t}) \quad (4.50)$$

- **Solution physique générale réelle :**

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A e^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}) \quad (4.50)$$

- **Formule d'Euler :**

$$e^{\pm i\omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t) \quad (4.11)$$

- **Solution physique générale réelle :** (4.11) dans (4.50)

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(\underbrace{(A + A^*)}_{= 2 \operatorname{Re}(A) \in \mathbb{R}} \cos(\omega t) + \underbrace{(A - A^*) i}_{= -2 \operatorname{Im}(A) \in \mathbb{R}} \sin(\omega t) \right) \quad (4.51)$$

- **Changement de variables :** $(A + A^*, (A - A^*) i) \rightarrow (C, \varphi)$

$$(A + A^*) = C \cos \varphi$$

$$(A - A^*) i = -C \sin \varphi \quad (4.52)$$

- **Solution physique générale réelle :** (4.52) dans (4.51)

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \left(\cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t) \right) \quad (4.53)$$

- **Solution physique générale réelle :**

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \left(\cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t) \right) \quad (4.53)$$

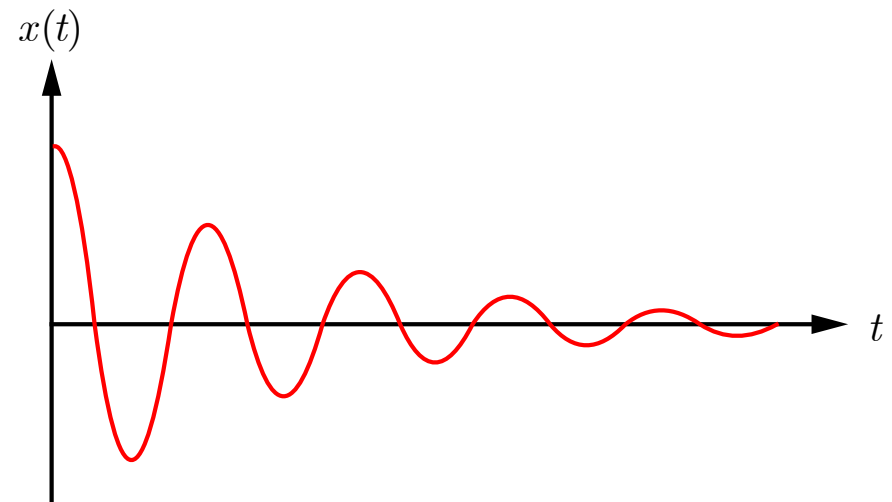
- **Identité trigonométrique :**

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi \quad (4.54)$$

- **Solution physique générale réelle :** (4.54) dans (4.53)

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.55)$$

C'est un oscillateur harmonique dont l'amplitude $C e^{-\gamma t}$ décroît exponentiellement au cours du temps.



- **Amortissement fort :**

$$\gamma > \omega_0 \quad \text{ainsi} \quad \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \equiv \omega < \gamma \quad (4.56)$$

- **Racines :** de l'équation caractéristique (4.44)

$$\lambda_1 = -\gamma + \omega \quad \text{où} \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}_-^*$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \omega \quad \text{où} \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}_-^* \quad (4.57)$$

- **Temps caractéristiques :** réels et positifs

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\gamma - \omega} \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\gamma + \omega} \in \mathbb{R}_+^* \quad (4.58)$$

- **Solution mathématique générale complexe :** de l'équation du mouvement (4.42)

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{où} \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C} \quad (4.46)$$

- **Solution physique générale réelle :** $A_1 \in \mathbb{R}$ et $A_2 \in \mathbb{R}$

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (4.59)$$

- **Amortissement critique** : (4.60)

$$\gamma = \omega_0 \quad \text{ainsi} \quad \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma = -\omega_0$$

- La solution doit contenir deux paramètres réels indépendants A et B puisque l'équation du mouvement (4.42) est une équation différentielle du 2^e ordre.

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t} \quad (4.61)$$

- **Equation de la vitesse** : dérivée temporelle de (4.61)

$$\dot{x}(t) = (B - \omega_0 (A + Bt)) e^{-\omega_0 t} \quad (4.62)$$

- **Equation de l'accélération** : dérivée temporelle de (4.62)

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0 (2B - \omega_0 (A + Bt)) e^{-\omega_0 t} \quad (4.63)$$

- **Démonstration** : $\gamma = \omega_0$ dans (4.42) ainsi que (4.60), (4.62) et (4.63)

$$\ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.64)$$

❶ **Amortissement faible** : (4.55)

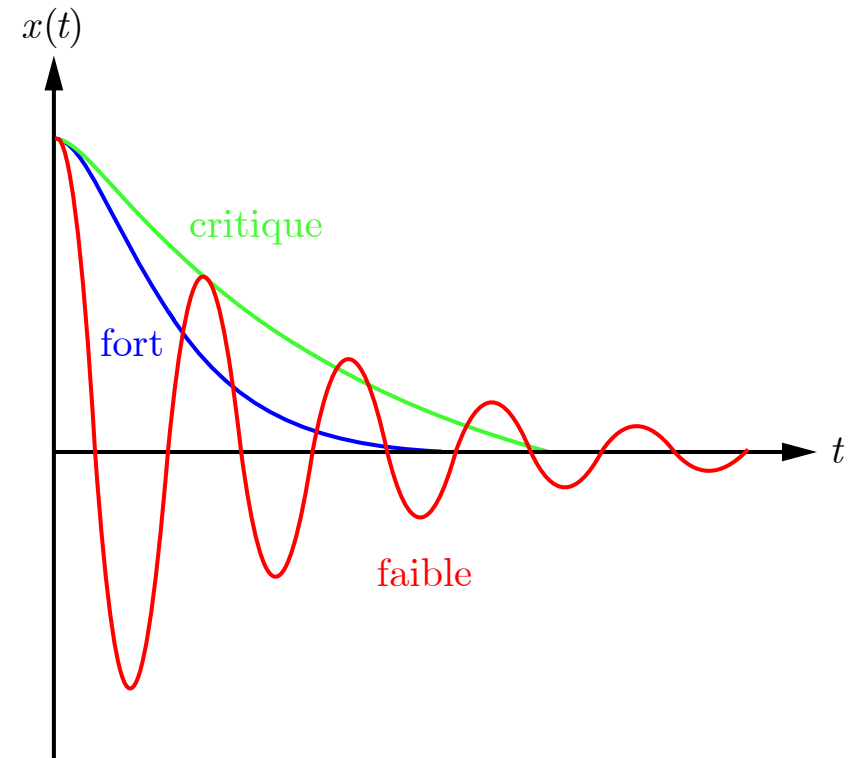
$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

❷ **Amortissement fort** : (4.59)

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

❸ **Amortissement critique** : (4.61)

$$x(t) = (A + B t) e^{-\omega_0 t}$$



❶ **Amortissement faible** : l'amplitude d'oscillation est exponentiellement amortie durant les oscillations.

❷ **Amortissement fort** : l'amplitude est exponentiellement amortie avant qu'il y ait oscillation.

❸ **Amortissement critique** : l'amplitude est exponentiellement amortie juste avant qu'il y ait oscillation.

❶ **Amortissement faible :** $\gamma < \omega_0$

• **Equation horaire générale :**

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.55)$$

• **Equation de la vitesse :** dérivée temporelle de (4.55)

$$\dot{x}(t) = -C e^{-\gamma t} (\gamma \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)) \quad (4.66)$$

• **Conditions initiales :** position et vitesse

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.65)$$

• **Condition initiale sur la vitesse :** (4.65) dans (4.66)

$$\tan \varphi = -\frac{\gamma}{\omega} \quad \text{ainsi} \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{\gamma}{\omega}\right) = -\arctan\left(\frac{\gamma}{\omega}\right) \quad (4.67)$$

• **Condition initiale sur la position :** (4.65) dans (4.55) et (4.67)

$$x_0 = C \cos \varphi \quad \text{ainsi} \quad C = \frac{x_0}{\cos\left(-\arctan\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)\right)} \quad (4.68)$$

- **Equation horaire générale :**

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.55)$$

- **Angle de déphasage :**

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\gamma}{\omega}\right) \quad (4.67)$$

- **Amplitude maximale :**

$$C = \frac{x_0}{\cos\left(-\arctan\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)\right)} \quad (4.68)$$

- **Identité trigonométrique et amplitude :**

$$\cos\left(\pm \arctan\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)\right) = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}^{-1} \quad \text{ainsi} \quad C = x_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} \quad (4.69)$$

- **Equation horaire particulière :** (4.69) et (4.67) dans (4.55)

$$x(t) = x_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}} e^{-\gamma t} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)\right) \quad (4.70)$$

2 **Amortissement fort** : $\gamma > \omega_0$

• **Equation horaire générale** :

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (4.59)$$

• **Equation de la vitesse** : dérivée temporelle de (4.59)

$$\dot{x}(t) = -\frac{A_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{A_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (4.71)$$

• **Conditions initiales** : position et vitesse

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.65)$$

• **Conditions initiales** : (4.65) dans (4.59) et (4.71)

$$A_1 + A_2 = x_0 \quad \text{et} \quad -\frac{A_1}{\tau_1} - \frac{A_2}{\tau_2} = 0 \quad (4.72)$$

• **Amplitudes** : (4.53) remis en forme

$$A_1 = \frac{x_0 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{x_0 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \quad (4.73)$$

- **Equation horaire générale :**

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (4.59)$$

- **Amplitudes :**

$$A_1 = \frac{x_0 \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{x_0 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \quad (4.73)$$

- **Equation horaire particulière :** déterminée par les conditions initiales

$$x(t) = \frac{x_0}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \quad (4.74)$$



3 **Amortissement critique** : $\gamma = \omega_0$

• **Equation horaire générale** :

$$x(t) = (A + B t) e^{-\omega_0 t} \quad (4.61)$$

• **Equation de la vitesse** : dérivée temporelle de (4.61)

$$\dot{x}(t) = (B - \omega_0 (A + B t)) e^{-\omega_0 t} \quad (4.75)$$

• **Conditions initiales** : position et vitesse

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (4.65)$$

• **Conditions initiales** : (4.65) dans (4.61) et (4.75)

$$A = x_0 \quad \text{et} \quad B = A \omega_0 = x_0 \omega_0 \quad (4.76)$$

• **Equation horaire particulière** : déterminée par les conditions initiales

$$x(t) = x_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \quad (4.77)$$



- Deux oeufs sont suspendus à des ressorts identiques : l'un est cuit et l'autre est cru. On enroule les deux ressorts en torsion de manière identique, puis on les lâche.
- On observe qu'un oeuf a un mouvement d'oscillation en torsion qui est rapidement amorti en raison du frottement interne et l'autre a un mouvement d'oscillation en torsion qui n'est quasiment pas amorti.
- Quel oeuf est cuit ?

4.3 Mouvement circulaire et vitesse angulaire

4.3.1 Abscisse curviligne

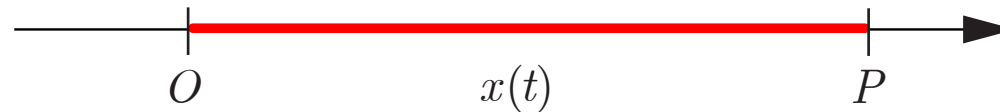
4.3.2 Vitesse angulaire scalaire

4.3.3 Accélération centripète

4.3.4 Vecteur vitesse angulaire

4.3.5 Accélération angulaire scalaire

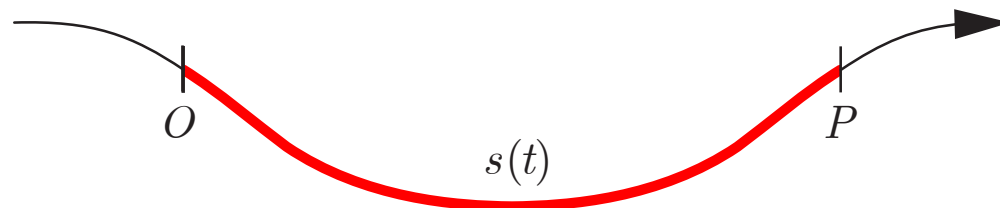
- **Abscisse** : distance $x(t)$ parcourue par un point matériel P le long d'une droite.



- **Vitesse** : dérivée temporelle de $x(t)$

$$v(t) = \dot{x}(t) \quad (1.2)$$

- **Abscisse curviligne** : distance $s(t)$ parcourue par un point matériel P le long d'une courbe.



- **Vitesse scalaire** : dérivée temporelle de $s(t)$

$$v(t) = \dot{s}(t) \quad (4.78)$$



- ① **Mouvement circulaire uniforme (MCU)** : trajectoire circulaire de rayon constant à vitesse scalaire constante.

- **Abscisse curviligne :**

$$s(t) = R \phi(t) \quad \text{où} \quad R = \text{cste} \quad (4.79)$$

- **Vitesse scalaire :**

$$v = \dot{s} = R \dot{\phi} = \text{cste} \quad (4.80)$$

- **Vitesse angulaire scalaire :**

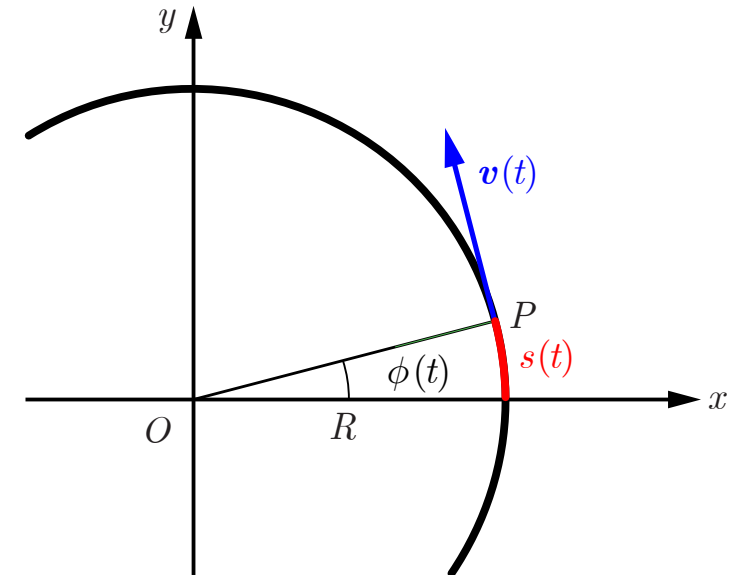
$$\omega = \dot{\phi} = \text{cste} \quad (4.81)$$

- **Vitesse et vitesse angulaire :** (4.80) et (4.81)

$$v = R \omega \quad \text{et} \quad \omega = \frac{v}{R} \quad (4.82)$$

- **Mouvement circulaire uniforme :**

$$v = \text{cste} \quad \text{et} \quad \omega = \text{cste} \quad (\text{MCU}) \quad (4.83)$$



- 1 **Mouvement circulaire uniforme (MCU)** : trajectoire circulaire de rayon constant à vitesse scalaire constante.

- **Variation infinitésimale de l'angle :**

$$d\phi(t) = \omega dt \quad (4.84)$$

- **Intégration :** (4.84) de 0 à t

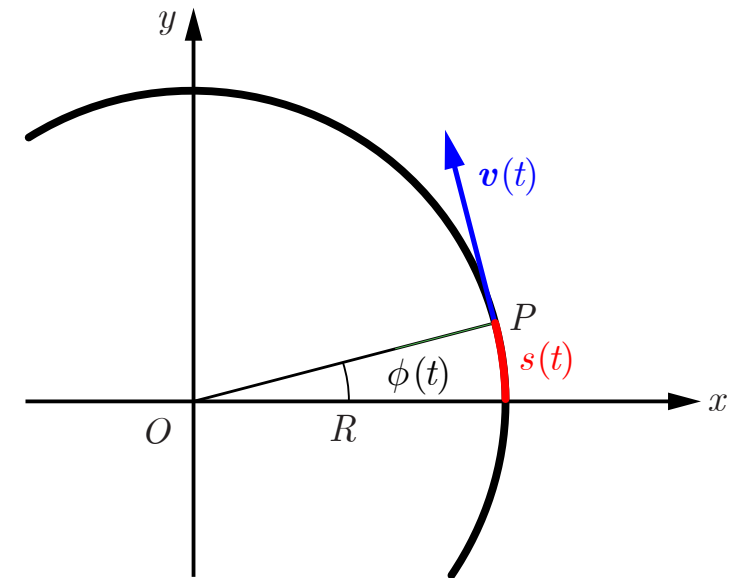
$$\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi'(t') = \omega \int_0^t dt' \quad (4.85)$$

- **Angle :** avec $\phi(0) = \phi_0$

$$\phi(t) = \omega t + \phi_0 \quad (4.86)$$

- **Abscisse curviligne :** (4.84) dans (4.79) avec $s_0 = R\phi_0$ et (4.82)

$$s(t) = R\phi(t) = R\omega t + R\phi_0 = vt + s_0 \quad (4.87)$$



❶ **Mouvement circulaire uniforme (MCU)** : rayon R dans le plan Oxy

- **Vecteur position** : avec $\phi(0) = 0$ (4.88)

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\phi(t)) \hat{\mathbf{x}} + R \sin(\phi(t)) \hat{\mathbf{y}}$$

- **Vecteur position** : avec $\phi(t) = \omega t$ (4.89)

$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + R \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

- **Vecteur vitesse** : $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ (4.90)

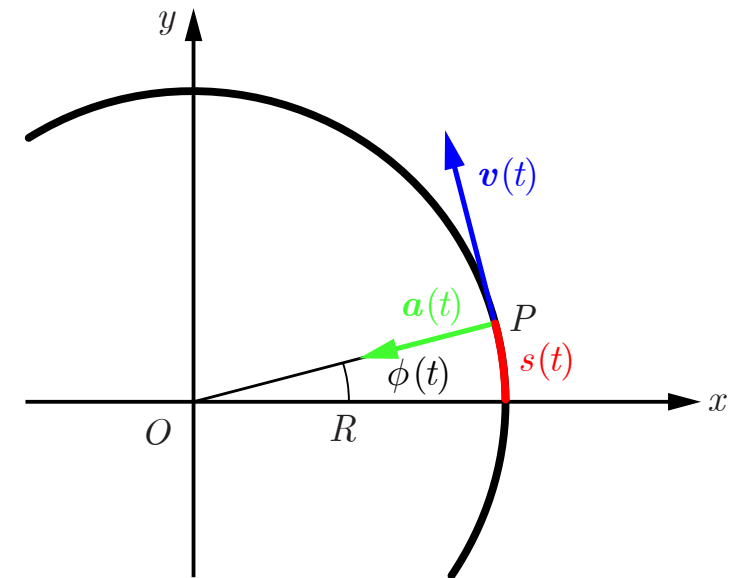
$$\mathbf{v}(t) = -R\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + R\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

- **Vecteur accélération** : $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$

$$\mathbf{a}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} - R\omega^2 \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}} \quad (4.91)$$

- **Vecteur accélération centripète** :

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (4.92)$$



❶ **Mouvement circulaire uniforme (MCU)** : rayon R dans le plan Oxy

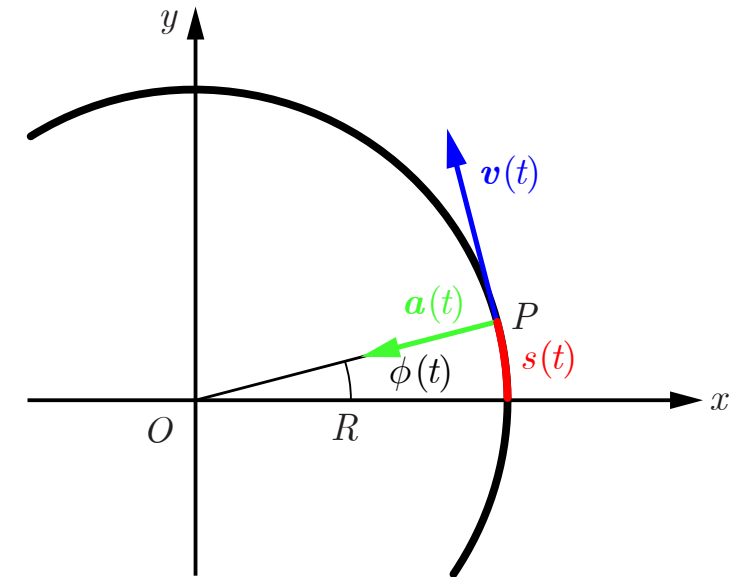
• **Vecteur accélération centripète :**

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (4.92)$$

• **Accélération centripète scalaire :** (4.93)

$$a = \|\mathbf{a}(t)\| = \omega^2 \|\mathbf{r}(t)\| = \omega^2 R = \text{cste}$$

• **Accélération centripète et vitesse :**



$$a = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \quad (4.94)$$

❶ Vecteur position $\mathbf{r}(t)$ radial dirigé vers l'extérieur

❷ Vecteur accélération centripète $\mathbf{a}(t)$ radial dirigé vers le centre

- ❶ **Mouvement circulaire uniforme (MCU)** : rayon R dans le plan Oxy
rotation dans le sens trigonométrique

- **Vecteur position** : (4.89)

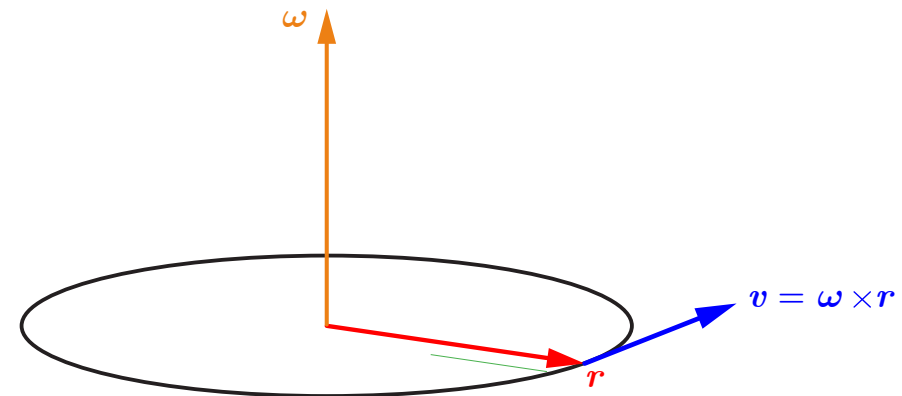
$$\mathbf{r}(t) = R \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + R \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

- **Vecteur vitesse** : (4.90)

$$\mathbf{v}(t) = -R\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + R\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}}$$

- **Vecteur vitesse angulaire** : (4.95)
règle du tire-bouchon (main droite)

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \omega \hat{\mathbf{z}} = \text{cste} \quad \text{où} \quad \omega = \|\boldsymbol{\omega}\| > 0$$



- **Vecteur vitesse** : règle du logo “Mercedes”

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) &= R\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} + R\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \\ &= -R\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + R\omega \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{v}(t) \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) \quad (4.97)$$

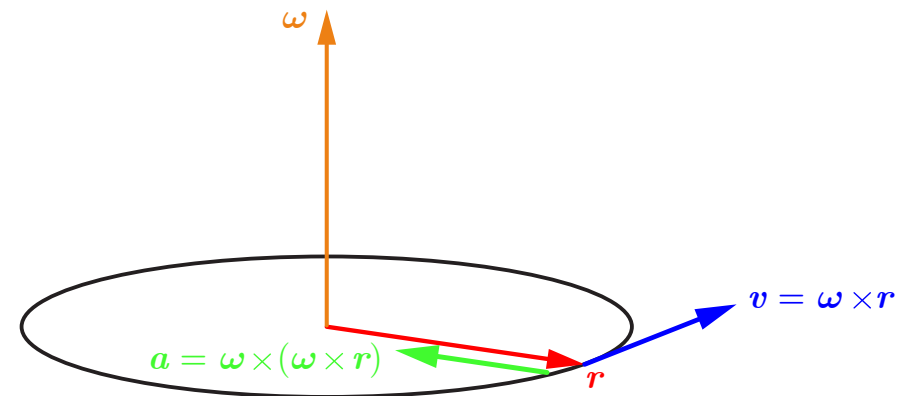
- ❶ **Mouvement circulaire uniforme (MCU)** : rayon R dans le plan Oxy
rotation dans le sens trigonométrique

• **Vecteur vitesse :**

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t) \quad (4.97)$$

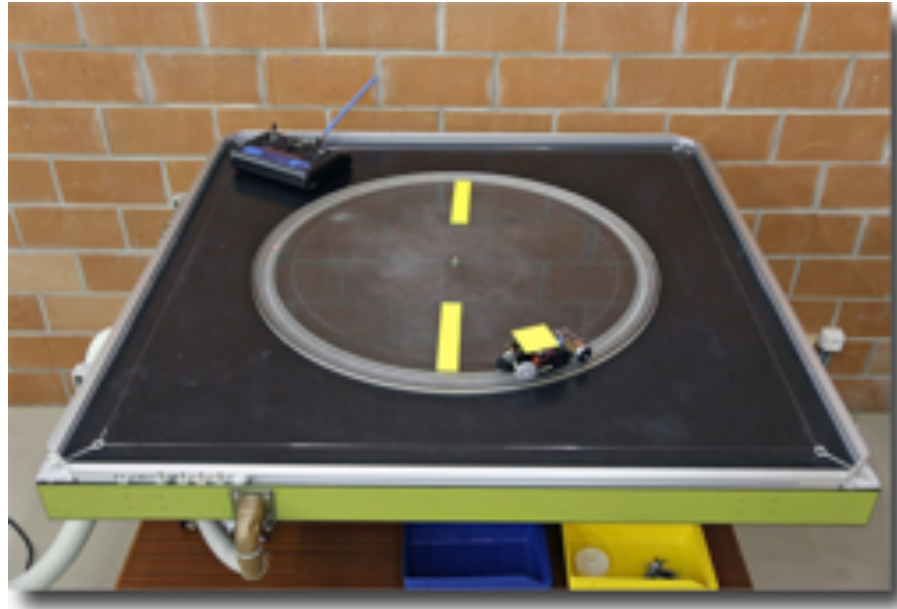
• **Vecteur accélération : $\omega = \text{cste}$**

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}(t) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}(t) \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t)) \end{aligned} \quad (4.98)$$



• **Vecteur accélération centripète :** (1.44) et (4.98)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}(t)) \stackrel{(1.44)}{=} \\ &= \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}(t))}_{=0} \boldsymbol{\omega} - \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})}_{=\omega^2} \mathbf{r}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \end{aligned} \quad (4.99)$$

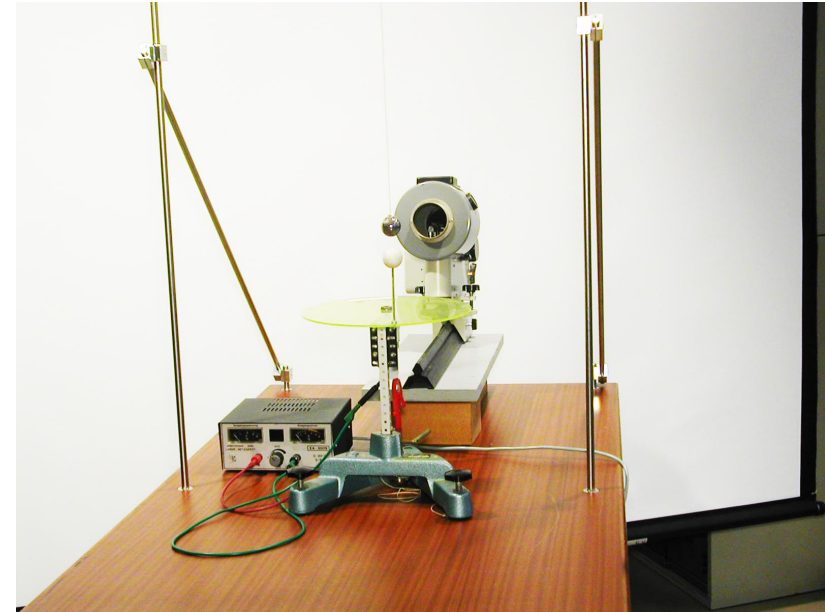


- Une voiture a un mouvement circulaire uniforme (MCU) de vitesse $\boldsymbol{v}(t)$ de norme constante v tangente à sa trajectoire circulaire de rayon R dans le plan horizontal.
- La vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ de norme ω est orientée verticalement vers le haut pour un mouvement dans le sens trigonométrique et vers le bas pour un mouvement dans le sens des aiguilles d'une montre.

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}(t)$$

- L'accélération centripète est toujours radiale et orientée vers le centre.

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}(t)) = -\omega^2 \boldsymbol{r}(t)$$



- En ombre chinoise, on observe que le mouvement oscillatoire d'un pendule et le mouvement circulaire d'une boule de ping pong se superposent. On en déduit que la projection d'un mouvement circulaire est un mouvement oscillatoire et que le mouvement circulaire est composé de deux mouvements oscillatoires déphasés d'un quart de période (projections selon deux axes orthogonaux).
- ❶ **Position** : $x(t) = R \cos(\omega t)$ et $y(t) = R \sin(\omega t)$
 - ❷ **Vitesse** : $\dot{x}(t) = -R\omega \sin(\omega t)$ et $\dot{y}(t) = R\omega \cos(\omega t)$
 - ❸ **Accélération** : $\ddot{x}(t) = -R\omega^2 \cos(\omega t)$ et $\ddot{y}(t) = -R\omega^2 \sin(\omega t)$

- 2 **Mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)** : trajectoire circulaire de rayon constant à accélération tangentielle scalaire constante.

- **Vitesse scalaire** : tangentielle

$$v(t) = \dot{s}(t) = R \dot{\phi}(t) = R \omega(t) \quad (4.100)$$

- **Accélération tangentielle** : (4.101)

$$a_t = \dot{v} = R \dot{\omega} \quad \text{et} \quad a_t = \ddot{s} = R \ddot{\phi}$$

- **Accélération angulaire scalaire** :

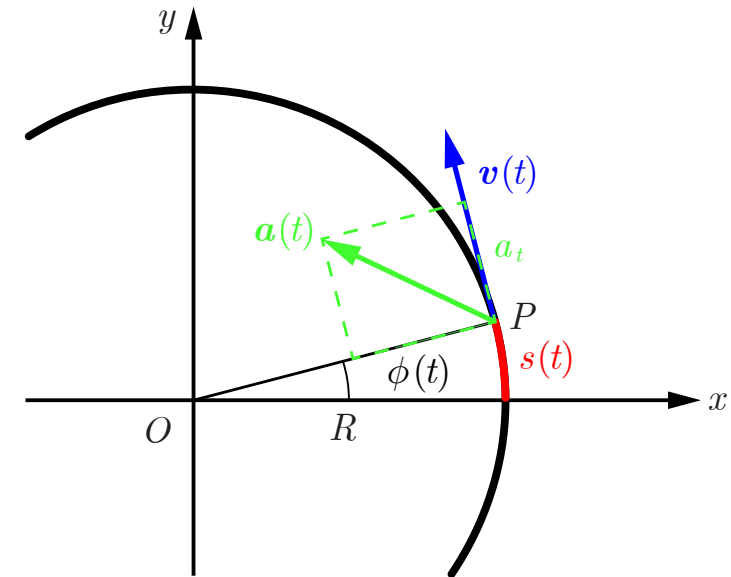
$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi} = \text{cste} \quad (4.102)$$

- **Accélération et accélération angulaire** :

$$a_t = R \alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{a_t}{R} \quad (4.103)$$

- **Mouvement circulaire uniformément accéléré** :

$$a_t = \text{cste} \quad \text{et} \quad \alpha = \text{cste} \quad (\text{MCUA}) \quad (4.104)$$



- ② **Mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)** : trajectoire circulaire de rayon constant à accélération tangentielle scalaire constante.

- **Variation infinitésimale de la vitesse angulaire :**

$$d\omega(t) = \alpha dt \quad (4.105)$$

- **Intégration :** de 0 à t

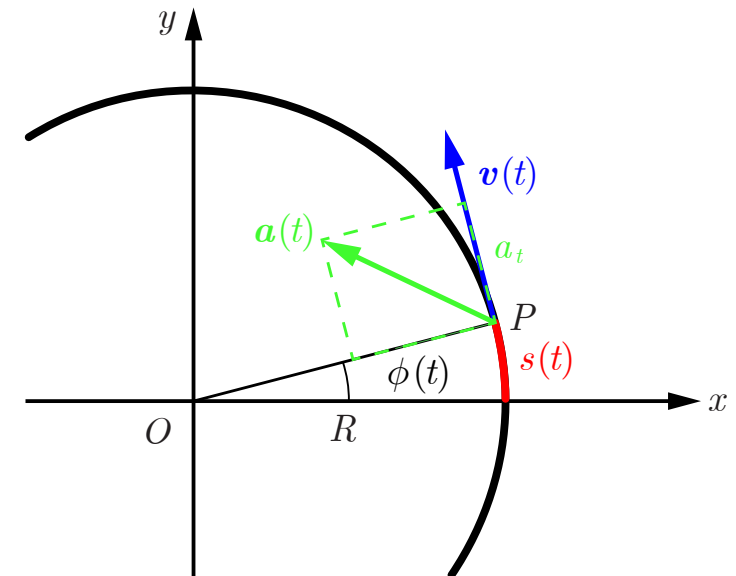
$$\int_{\omega(0)}^{\omega(t)} d\omega'(t') = \alpha \int_0^t dt' \quad (4.106)$$

- **Vitesse angulaire :** avec $\omega(0) = \omega_0$

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0 \quad (4.107)$$

- **Vitesse scalaire :** avec $v_0 = R\omega_0$ et (4.103)

$$v(t) = R\omega(t) = R\alpha t + R\omega_0 = a_t t + v_0 \quad (4.108)$$



- 2 **Mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)** : trajectoire circulaire de rayon constant à accélération tangentielle scalaire constante.

- **Vitesse angulaire** : $\omega = \dot{\phi}(t)$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \alpha t + \omega_0 \quad (4.109)$$

- **Variation infinitésimale de l'angle** :

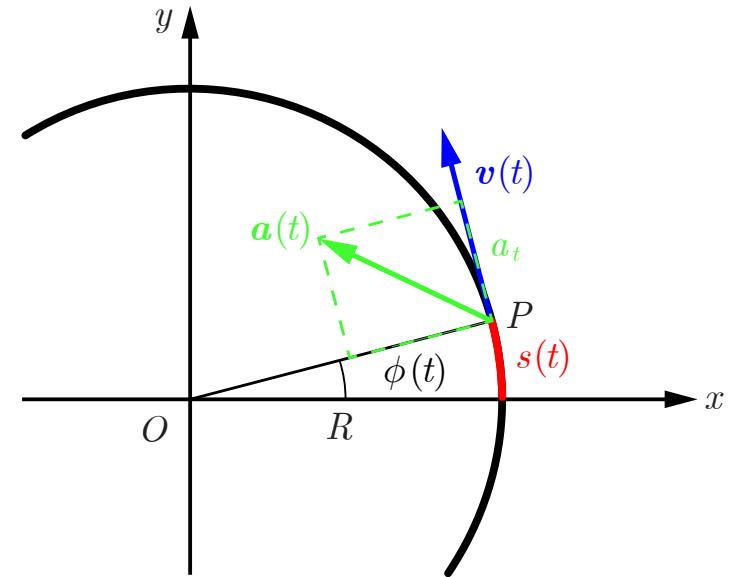
$$d\phi(t) = \alpha t dt + \omega_0 dt \quad (4.110)$$

- **Intégration** : de 0 à t

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi'(t') = \alpha \int_0^t t' dt' + \omega_0 \int_0^t dt' \quad (4.111)$$

- **Angle** : avec $\phi(0) = \phi_0$

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \phi_0 \quad (4.112)$$



- ② **Mouvement circulaire uniformément accéléré (MCUA)** : trajectoire circulaire de rayon constant à accélération tangentielle scalaire constante.

- **Angle :**

$$\phi(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + \phi_0 \quad (4.112)$$

- **Abscisse curviligne initiale :**

$$s_0 = R \phi_0 \quad (4.113)$$

- **Vitesse scalaire initiale :**

$$v_0 = R \omega_0 \quad (4.114)$$

- **Accélération tangentielle :**

$$a_t = R \alpha \quad (4.103)$$

- **Abscisse curviligne :**

$$s(t) = R \phi(t) = \frac{1}{2} R \alpha t^2 + R \omega_0 t + R \phi_0 = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t + s_0 \quad (4.115)$$

